

الإحصائي
حسين علي عبدالله اليعقوبي
مدير الإحصاء والتخطيط الجامعي
جامعة ذي قار - العراق

بعض المفاهيم الأساسية اختبار الفرضيات

الفرض الإحصائي:-

يجب أولاً التمييز بين الفرضيات العلمية والفرضيات الإحصائية ، حيث أن الفرضية العلمية هي حل مقترح لمشكله يصاغ بشكل استنتاجي كتخمين يستند على معلومات علمية سابقة وتقرر صحة الفرضية العلمية أو أخطأها في ضوء الخبرة والتجربة ، أما الفرضية الإحصائية فهي ادعاء أو إفادة أو مقوله أو تصريح تتعلق بالتغيرات العشوائية لتوزيع احتمالي والتي يمكن مشاهدتها . فمثلاً إذا فرضنا أن متوسط المجتمع $M=15$ وان نسبة الوحدات المعيبة في الإنتاج $P=0.03$ وان تباين المجتمع $\sigma^2 = 14$ فهذه جميعها فرضيات إحصائية ويرمز لها بالرمز H . وتنقسم الفرضيات الإحصائية عادة إلى قسمين :

- 1- الفرض البسيط :- وهو الفرض الذي يحدد ويعرف التوزيع الإحصائي للمتغيرات العشوائية تحديداً كاملاً ، مثلاً متوسط المجتمع $M=15$.
- 2- الفرض المركب :- وهو الفرض الذي لا يمكن تحديد التوزيع الإحصائي للمتغير العشوائي تحديد كاملاً ، مثلاً متوسط المجتمع $M>15$.

صياغة الفروض الاحصائية

في اختبارات الفروض الاحصائية هنالك فرضان احدهما يسمى فرض العدم والآخر الفرض البديل

- 1- فرض العدم:- ويعرف بأنه صيغة مبدئية عن معلومة (او معالم) المجتمع المجهول . وهو الفرض الذي يرغب الباحث باختياره لانه غالباً ما يشير الى عدم وجود اختلاف بين المجموعات او الفئات او عدم وجود علاقة بين المتغيرات ويتوقع الباحث عادة خطأ هذا الفرض مما يستوجب رفضه . وعادة ما يقوم الباحثين في كافة مجالات العلوم المختلفة بوضع فرض معين وتكون مهمة الاحصائي مساعدتهم في اتخاذ القرار المناسب بقبول او رفض هذا القرار .

- 2- الفرض البديل :- ويعرف بأنه صيغة مبدئية تشير الى نفس المعلومة المجهوله لها قيمة تختلف عن القيمة التي حدودها فرض العدم . وهو الفرض الذي لا يخضع للاختبار الاحصائي حيث يتم قبوله اذا ما تم رفض فرض العدم من قبل الباحث . وهذا يعني بأنه يوجد دائماً فرض بديل لفرض العدم عند اختباره

. وان رفض فرض العدم يعني قبول الفرض البديل والعكس صحيح
والفرض البديل يمكن ان يصاغ باحدى الطريقتين ، طريقة غير متجهه أو
طريقة متجهه.

الطريقة غير المتجهه تكون محايدة وتختلف عن فرض العدم بغض النظر عن
كون هذه القيمة اعلى او ادنى عن القيمة المفروضة في فرض العدم ، مثلا ان
متوسط درجات الطلاب في مادة الاحصاء تختلف عن ٧٠ أي نضع الفرض
البديل كالآتي $H_1 : M \neq 70$

اما الطريقة المتجهه فتهم بكون قيمة المعلمة أما اكبر من او اصغر من القيمة
المقترحة من فرضية العدم . مثلا ان متوسط درجات الطلاب في مادة الاحصاء
اكبر من ٧٠ وفي هذه الحالة تصاغ الفرض البديل كالآتي $H_1 : M > 70$ ، او
متوسط درجات الطلاب في مادة الاحصاء اقل من ٧٠ فتصاغ كالآتي
 $H_1 : M < 70$

من هذا نلاحظ ان الطريقة الاولى (غير المتجهه) لم تحدد اجاها معيناً للفرق بين
المتوسط والقيمة التي حدودها فرض العدم لذا فان الاختبار يسمى اختبار من
طرفين اما في الحالتين السابقتين للطريقة الثانية (المتجهه) يسمى الاختبار
اختبار من طرف واحد .

الاختبار الاحصائي

هو تقسيم الحالات الممكنة لقيم المتغير العشوائي (فضاء العينة S) الى منطقتين
منطقة رفض واخرى منطقة قبول

- منطقة الرفض (المنطقة الحرجة) :- هي المنطقة التي تحتوي على قيم
الاختبار الاحصائية التي تؤدي الى رفض فرض العدم وهي مجموعة جزئية
من فضاء العينة .

- منطقة القبول :- هي المنطقة المتبقية من فضاء العينة وفيها يتم عدم رفض
فرض العدم .

ويمكن اجراء الاختبار باخذ عينة عشوائية بحجم n فاذا وقعت هذه النقطة في منطقة
الرفض نرفض H_0 واذا وقعت في منطقة القبول نقبل فرض العدم واختبار
الفرضيات يهدف الى اتخاذ قرار حول ما اذا كانت فرض العدم مقبولة او لا وذلك
باستخدام مختبر احصائي مناسب .

- المختبر الاحصائي :- وهو متغير عشوائي تستخدم قيمته في اتخاذ قرار برفض او
عدم رفض فرض العدم أي هو متغير عشوائي ذو توزيع احتمالي يصف العلاقة بين
القيم النظرية للمعلمة والقيم المحسوبة من العينة .

أنواع الأخطاء الاحصائية

ان اتخاذ أي قرار احصائي ينطوي على خطأ بنسبة ما وذلك لانه من المحتمل
نرفض فرض في حين انه صحيح او امكانية قبوله عندما يكون خاطئ لهذا فان
هنالك نوعين من الاخطاء الاحصائية ، الخطا من النوع الاول والخطا من النوع
الثاني وذلك لاعتمادنا في اتخاذ هذا القرار على عينة والعينة هي جزء من الكل

- الخطأ من النوع الأول:- وهو الخطأ الناشئ من رفض فرض العدم وهو صحيح ويرمز لاحتماله بالرمز α
 - الخطأ من النوع الثاني :- وهو الخطأ الناشئ من عدم رفض فرض العدم وهو خاطئ ويرمز لاحتماله بالرمز β
- ويمكن تلخيص نتائج الاختبار في جدول على النحو الآتي

الحقيقة (حاله الطبيعية)

H_0 خاطئة	H_0 صحيحة	
خطا من النوع الثاني	✓	القرار // عدم رفض H_0
✓	خطا من النوع الأول	القرار // رفض H_0

وعادة ما يرمي الباحث بجعل الخطأين α و β اقل ما يمكن ، ولكن في حاله ثبات حجم العينة فان أي انخفاض في قيمة إحدى الاحتمالين يؤدي إلى ارتفاع في قيمة الآخر ولا يمكن تقليل الاحتمالين معا إلا بزيادة حجم العينة وقد جرت العادة من قبل الإحصائيين الى حل عملي وهو تثبيت قيمة α (احتمال الخطأ من النوع الاول) عند مستوى معين سمي مستوى الدلالة أو المعنوية والبحث عن الاحتمال الذي يعطي اقل قيمة إلى β أي عند مقارنة عدة اختبارات فاننا نثبت قيمة α لكل منها ونختار الاختبار الذي له اقل قيمة β او اكبر قيمة غالي $1-\beta$ ، أي جعل هذه القيمة $(1-\beta)$ قريبة او تساوي من الواحد ، وكلما زادت قيمة $1-\beta$ مع ثبات α أي كلما زادت القوة كلما كان الاختبار افضل وعلى هذا الاساس فاننا نفضل الاختبار ذات القوة الاكبر لذا سميت القيمة $1-\beta$ بقوة الاختبار .

الخطوات الاساسية في اختبارات الفروض

تعتبر اختبارات الفروض الاحصائية اسلوبا لتحديد ما اذا كانت بيانات العينة تؤدي الى قبول او رفض صياغة مبدئية عن معلمة (او معالم) المجتمع ويتضمن هذا الاسلوب الخطوات التالية .

- 1- التعرف على طبيعة البيانات :- قبل البدء بعملية الاختبار يتطلب التعرف على طبيعة البيانات الاحصائية هل انها نوعية ام كمية؟متصله ام متقطعة؟ وبعد معرفة نوعية البيانات يتطلب التعرف على طبيعة التوزيع الذي جاءت منه هذه البيانات هل هو توزيع طبيعي او غير طبيعي؟ هل هي مستقلة ام لا ؟

٢- صياغة فرض العدم والبديلة :- وضع صيغة مبدئية عن معلمة المجتمع المجهوله كان تكون المعلمة متوسط مجتمع ، نسبة المجتمع ، او تباين المجتمع او قد تكون لعدده معالم مجهوله . وتكون على نوعين

$$- \text{اختبار ذات طرفين} \quad H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

- اختبار ذات طرف واحد

$$H_0 : \theta \leq \theta_0$$

$$H_1 : \theta > \theta_0$$

او

$$H_0 : \theta \geq \theta_0$$

$$H_1 : \theta < \theta_0$$

٣- تحديد مستوى المعنوية :-والذي هو عبارة عن احتمال رفض فرض العدم وهو صحيح ويسمى ايضا بمستوى الدلالة ويمثل احتمال الوقوع في خطأ من النوع الاول ويرمز له بالرمز α ، وتكون قيمته بين الصفر والواحد وعادة ما يستخدم ٠,٠٥ او ٠,٠١ .

٤- اختبار احصاءه :- وهو الاختبار المناسب لاختبار الفروض الاحصائية ، ونحدد على ضوء توزيع المعاينة للاحصاءه المستخدمة كمقدر للمعلمة المراد اختبارها وغالبا ما تعرف هذه الاحصاءه بحسب الصيغة التالية .
المقدر - القيمة المتوقعة للمقدر

$$\text{احصاءة الاختبار} = \frac{\text{المقدر} - \text{القيمة المتوقعة للمقدر}}{\text{الانحراف المعياري المقدر}}$$

الانحراف المعياري المقدر

وهي متغير عشوائي تتغير قيمتها على ضوء تغير العينة العشوائية .

٥- جمع البيانات عن طريق العينة العشوائية من مجتمع الدراسة ثم التعويض لحساب قيمة احصاءه الاختبار والتي تسمى بالقيمة المستخرجة .

٦- تحديد القيمة الحرجة للاختبار استنادا للتوزيع الاحتمالي الى احصاءه الاختبار واعتمادا على مستوى المعنوية α .

٧- اتخاذ القرار بشأن قبول او رفض فرض العدم H_0 .

بعد اختيار المنطقة الحرجة وحساب قيمة احصاءه الاختبار سيقوم الباحث باتخاذ القرار فيما اذا سيرفض او يقبل فرض H_0 معتمدا على نتائج التجربة فاذا وقعت النتيجة داخل المنطقة الحرجة فانه سيرفض الفرض H_0 باحتمال خطأ α اما اذا وقعت النتيجة خارج المنطقة الحرجة (منطقة القبول) فان الباحث لن يرفض H_0 وسوف يتحمل امكانية الوقوع بالخطا من النوع الثاني .

الاختبارات

١- اختبارات تتعلق بمتوسط المجتمع M

أ- التباين معلوم σ^2

عند اختبار متوسط المجتمع M والتباين معلوم σ^2 فهناك حالتين من الممكن تطبيقها والتعامل معها وهما .

الحالة الأولى :-

لتكن x_1, x_2, \dots, x_n عينة عشوائية من مجتمع يتوزع توزيع طبيعي $(M, \sigma^2) \sim N$ وكانت σ^2 معلومة فان إحصاءه الاختبار لاختبار الفرضية

$$H_0 : M = M_0$$

ضد احد الفرضيات البديلة الآتية .

$$H_1 : M \neq M_0$$

$$H_1 : M > M_0$$

$$H_1 : M < M_0$$

ستكون \bar{x} هو المقدر الى M ويكون توزيعه هو الاخر يتوزع توزيع طبيعي بمتوسط M وتباين $\frac{\sigma^2}{n}$ بغض النظر عن حجم العينة العشوائية المستخدمه وعلية ستكون احصاءه الاختبار هي كالآتي .

$$Z = \frac{\bar{x} - M_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

ولها توزيع طبيعي قياسي $N(0,1)$ ويتم مقارنه قيمه Z المحسوبة مع قيمتها الجدولية بمستوى دلالة α والتي ستحدد قيمتها على ضوء حاله الفرضية البديله .

أ- اذا كانت الفرضية البديله $H_1 : M \neq M_0$ ويدعى هذا الاختبار

باختبار من طرفين ويتم رفض H_0 اذا كانت $|Z| \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ وعدم

رفض H_0 (أي قبول H_0) عكس ذلك .

ب- اذا كانت الفرضية البديله $H_1 : M > M_0$ ويدعى اختبار من طرف

واحد ويتم رفض H_0 اذا كانت $|Z| \geq Z_{1-\alpha}$ ، وعدم رفض H_0 (أي

قبول H_0) عكس ذلك .

ج- اما اذا كانت الفرضية البديله $H_1 : M < M_0$ فهو الاخر يدعى

باختبار طرف واحد ويتم رفض H_0 اذا كانت $|Z| \geq Z_{1-\alpha}$ ، وعدم رفض

H_0 (أي قبول H_0) عكس ذلك .

وعلى هذا الاساس يتم رفض H_0 عندما تكون القيمة المستخرجة المطلقة

اكبر من القيمة الجدولية الى Z بمستوى دلالة α فاذا كان الاختبار من

طرف واحد نستخدم $Z_{1-\alpha}$ واذا كان الاختبار من طرفين نستخدم $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

مثال:-

في احدى الدراسات اختيرت عينة عشوائية من الاسر تقطن مدينة ما فاذا كانت حجم العينة ٢٥٠ اسرة ومجموع الدخول الشهرية لهذه الاسر

١٢٢٥٠ دينار واذا علم ان توزيع الدخل في هذه المدينة يتبع توزيع طبيعي بمتوسط M غير معلوم وتباين $\sigma^2 = 250$ (دينار) . اختبر بمستوى معنوية ٠,٠٥ بان متوسط الدخل يساوي ٥٠ دينار
الحل// نلاحظ ان حجم العينة كبير وان M مجهولة
يتم صياغة فرض العدم والبديل على النحو الآتي

$$H_0 : M = 50$$

$$H_1 : M \neq 50$$

والقدر المناسب لمتوسط المجتمع M هو الوسط الحسابي للعينة \bar{x} وهو

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{12250}{250} = 49 \text{ دينار}$$

$$Z = \frac{\bar{x} - M_0}{\sigma / \sqrt{n}} \text{ وان احصاءه الاختبار ستكون}$$

$$= \frac{49 - 50}{\sqrt{250} / \sqrt{250}} = -1$$

ولكون الاختبار من طرفين فنجد $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ أي $Z_{0.975} = 1.96$ وبذلك يكون القرار بان لانرفض فرض العدم لان القيمة المطلقة المستخرجة أصغر من الجدولية وعلية فلا يوجد دليل احصائي على ان متوسط الدخل في هذه المدينة يختلف عن ٥٠ دينار .

الحالة الثانية :-

نفرض أن العينة العشوائية x_1, x_2, \dots, x_n حجمها n من مجتمع ليس بالضروري ان يكون التوزيع توزيع طبيعي ولكن حجم العينة كبير جدا $n \geq 30$ مما يمكن الباحث من استخدام نظرية الغاية المركزية والتي تظهر بان \bar{x} مقدر M (متوسط المجتمع) سيؤول توزيعه تقريبا الى التوزيع الطبيعي بمتوسط M وتباين $\frac{\sigma^2}{n}$.

وان فرض العدم والبديل هما

$H_0 : M = M_0$ هذه احدى الفرضيات البديلة

$$H_1 : M > M_0$$

$$H_1 : M < M_0$$

وان احصاء الاختبار تكون $Z = \frac{\bar{x} - M_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

مثال:-

يعتقد مدير أحد مصانع البسكويت ان متوسط أجور محاله لا تختلف عن المتوسط العام للاجور في مدينة بغداد فاذا علم ان عدد العمال في مصنعه ٨١ وان متوسط اجورهم ٥٨ الف دينار وان المتوسط العام للاجور في نفس السنة في بغداد ٦٠ الف دينار وبانحراف معياري قدره ٨ الف دينار فهل تعتقد ان هذه البيانات تدعم رأي المدير . استخدم $\alpha = 0.05$.

الحل// نصوغ اولا فرض العدم والبديله وكالاتي

$$H_0 : M = 60$$

$$H_1 : M \neq 60$$

على الرغم من عدم معرفتنا للتوزيع الاحتمالي للمجتمع ولكن لكون حجم العينة كبير $n=81$ لذلك نستخدم احصاء الاختبار Z .

$$Z = \frac{\bar{x} - M_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{58 - 60}{8 / \sqrt{81}} = -2.25$$

ولكون الاختبار من طرفين نجد $Z_{0.975} = 1.96$ وبما ان القيمة المطلقة المستخرجة أكبر من الجدولية لذا نرفض فرضية العدم وهذا يعني أن رأي المدير غير صحيح وان هنالك أختلافاً جوهرياً بين متوسط اجوره واجور مدينه بغداد العامه .

ب-التباين غير معلوم :-

عند اختبار متوسط M والتباين مجهول ، يتطلب التقدير هذا التباين σ^2 أو التباين العينة S^2 وان حجم العينة هو الذي سيحدد احصاء الاختبار حيث ان توزيع احصاء الاختبار للعينة الكبيرة يختلف توزيعها عن احصاء الاختبار للعينة الصغيرة وعليه ستكون لدينا حالتين هما :

الحاله الاولى :-

لتكن x_1, x_2, \dots, x_n عينة عشوائية من مجتمع توزيعه طبيعي $(M, \sigma^2) \sim N$ والتباين مجهول وحجم العينة كبير جداً ($n > 30$) يمكن عندئذ استخدام Z وحسب نظرية الغاية المركزية والتي بموجبها احصاء الاختبار تؤول الى ان يكون توزيعها توزيع طبيعي وكالاتي :-

$$Z = \frac{\bar{x} - M_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

حيث ان S هي مقدر σ ويمكن حسابها حسب الصيغة الاتية

$$S^2 = \frac{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}{n}$$

وتقارن Z المستخرجة مع Z الجدولية وبنفس الاسس السابقة معتمداً على حالة الفرضية البديلة حيث نستخدم هذه الاحصاء الاختبار فرضية العدم

$$H_0 : M = M_0$$

$$H_1 : M \neq M_0$$

$$H_1 : M > M_0$$

$$H_1 : M < M_0$$

هذه احدى الفرضيات البديلة

مثال:- عقد اتفاق بين منتجي بيض المائدة واحدى مصدري البيض بهدف تصدير كمية من البيض بشرط ان لا يقل وزن البيضة عن 65 غم ، وقبل تصدير الكمية المتفق عليها اختيرت عينة عشوائية قوامها 49 بيضة وتبين ان متوسط البيضة في

هذه العينة كان ٦٢ غم والانحراف المعياري كان ٢ غم فهل تعتقد ان المصدر سيوافق على تصدير هذه الكمية من البيض اختبر ذلك تحت مستوى معنوية ٠,٠٥ .

الحل // بما ان التباين مجهول والمعلومات تخص العينة

$$H_0 : M \geq 65 \text{ نحدد فرض العدم والبديل كالآتي}$$

$$H_1 : M < 65$$

وعلى الرغم من ان التباين مجهول ولكن حجم العينة كبير لذا نستخدم احصاءه

$$Z = \frac{\bar{x} - M_0}{\sigma / \sqrt{n}} \text{ الاختبار } Z \text{ وكالآتي}$$

$$Z = \frac{62 - 65}{2 / \sqrt{49}} = -10.5$$

ولكون الاختبار من طرف واحد فاننا نستخدم القيمة الجدولية الى Z بمستوى دلالة ٠,٠٥ وكانت القيمة هي $Z_{0.95} = 1.645$ وبما ان القيمة المستخرجة المطلقة اكبر من القيمة الجدولية لذا نرفض فرض العدم وهذا يعني بان المصدر سيرفض تصدير الكمية من البيض لانها غير مطابقة للمواصفات المتفق عليها .

الحالة الثانية:-

لتكن x_1, x_2, \dots, x_n عينة عشوائية من مجتمع يتوزع توزيع طبيعي $(M, \sigma^2) \sim N$ ، التباين مجهول وحجم العينه صغير ($n < 30$) يمكن عندئذ استخدام احصاءه الاختبار

$$t = \frac{\bar{x} - M_0}{S / \sqrt{n}} \text{ الاختبار متوسط المجتمع } M \text{ الاتية :}$$

حيث أن \bar{x} يمثل مقدر متوسط المجتمع M .

S يمثل مقدر الانحراف المعياري للمجتمع σ^2 .

والاحصاءه لها توزيع t بدرجة حرية $(n-1)$ والاختبار فرضية العدم $H_0 : M = M_0$ ضد أي فرضية الفرضيات البديلة الاتية :

$$H_1 : M \neq M_0$$

$$H_1 : M > M_0$$

$$H_1 : M < M_0$$

يتم مقارنة القيمة المستخرجة الى t مع القيمة الجدولية لها بدرجة حرية $n-1$ وبمستوى دلالة α والتي ستحدد قيمتها على ضوء حاله الفرضية البديلة وكالآتي

١- اذا كانت الفرضية البديلة $H_1 : M \neq M_0$ فهذا يعني ان الاختبار من

طرفين ويتم رفض H_0 اذا كانت $|t| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}$ وعدم رفض H_0 اذا تحقق عكس

ذلك .

٢- اذا كانت الفرضية البديلة $H_1 : M > M_0$ وهذا يعني ان الاختبار من

طرف واحد ويتم رفض H_0 اذا كانت $|t| \geq t_{1-\alpha}^{n-1}$ وعدم رفض H_0 أي قبولها اذا

تحقق عكس ذلك

٣- اذا كانت الفرضية البديلة $H_1 : M < M_0$ وهذا يعني ان الاختبار من طرف واحد ويتم رفض H_0 اذا كانت $|t| \geq t_{1-\alpha}^{n-1}$ وعدم رفض H_0 أي قبولها اذا تحقق عكس ذلك

وعلى العموم يتم رفض فرضية العدم $H_0 : M = M_0$ ضد أي حاله من حالات الفرضية البديلة اذا كانت القيمة المستخرجة المطلقة الى (t) اكبر او تساوي القيمة الجدولية لها بمستوى دلالة α ودرجة حرية $n-1$ ونستخدم $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}$ اذا كان الاختبار من طرفين و $t_{1-\alpha}^{n-1}$ اذا كان الاختبار من طرف واحد .

مثال:-

أخذت عينة عشوائية حجمها ١٦ شخص من عمال احد المصانع للالبسة الجاهزة ووجد ان متوسط عدد القطع التي ينتجها العامل في اليوم الواحد هو ٢٢ قطعة والانحراف المعياري قطعة واحدة . اختبر فيما اذا كان مستوى الانتاج اليومي للعامل الواحد يساوي ٢٠ قطعة وبمستوى معنوية ٥% .
الحل //

في هذا التطبيق تصاغ فرض العدم والبديلة على النحو الاتي

$$H_0 : M = 20$$

$$H_1 : M \neq 20$$

ولكون حجم العينة صغير والتباين مجهول يتم استخدام احصاءه الاختبار الى t وكالاتي :

$$t = \frac{\bar{x} - M_0}{S / \sqrt{n}}$$

$$t = \frac{22 - 20}{1 / \sqrt{16}} = 8$$

اما القيمة الجدولية الى t بدرجة حرية (16-1=15) وبمستوى دلالة ٥,٥٠ ، ولكون الاختبار من طرفين نجد قيمة $t_{0.975}^{15} = 2.131$ القرار بما ان القيمة المستخرجة اكبر من القيمة الجدولية لذا نرفض فرض العدم H_0 وهذا يعني ان العامل لا ينتج ٢٠ قطعة يوميا حسب ادعاء صاحب المصنع .

٢- اختبارات تتعلق بتباين المجتمع σ^2 :

ويستخدم هذا النوع من الاختبارات عندما يتطلب الأمر اختبار ادعاء يتعلق بمدى تشتت قيم الظاهرة عن وسطها أو مدى تجانسها مثلا الرغبة في معرفة مدى دقة احد المصانع في إنتاج ، أو مدى تجانس درجات اجتياز دورة ما في مجال الإدارة.... الخ لتكن x_1, x_2, \dots, x_n عينة عشوائية من مجتمع يتوزع توزيع طبيعي $N \sim (M, \sigma^2)$ ، ويتطلب اختبار فرض العدم $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ ضد احدى الحالات الثلاثة للفرض البديل

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

وان احصاءه الاختبار لهذه الحالة تكون كالاتي

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

وان S^2 هي مقدر تباين المجتمع ويتم حسابه بالصيغة التالية

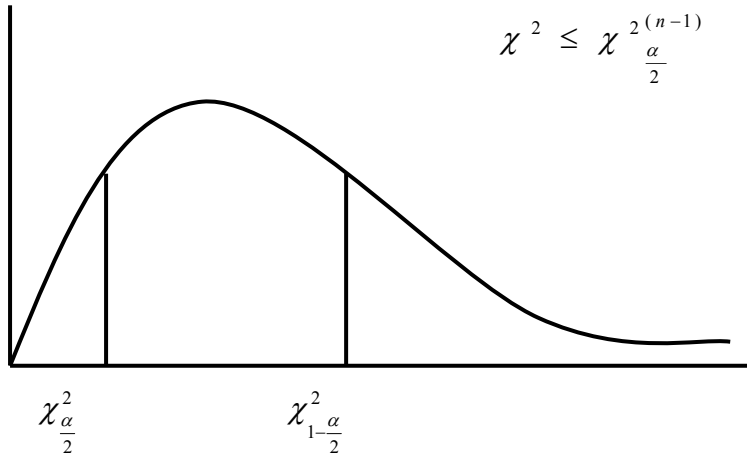
$$S^2 = \frac{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}{n-1}$$

ويكون توزيع هذه الاحصاءه توزيع مربع كاي χ^2 وبدرجة حرية $n-1$ بمستوى دلالة α وتقارن القيمة المستخرجة لمربع كاي مع القيمة الجدولية لها والتي ستحدد قيمتها على ضوء حاله الفرضية البديلة وكالاتي :

أ- اذا كانت $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ وهذا يعني ان الاختبار من طرفين وسيتم رفض H_0

$$\chi^2 \geq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{اذا كانت}$$

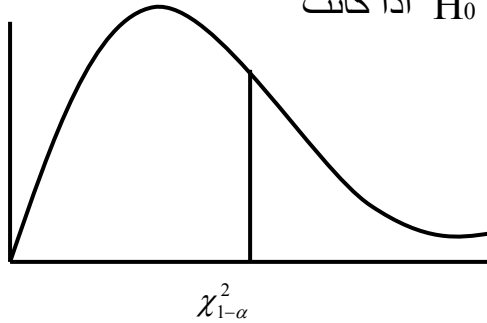
$$\chi^2 \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{او}$$



ب- اذا كان الفرضية البديلة $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ ويعتبر الاختبار في هذه الحالة

اختبار من طرف واحد ويتم رفض H_0 اذا كانت

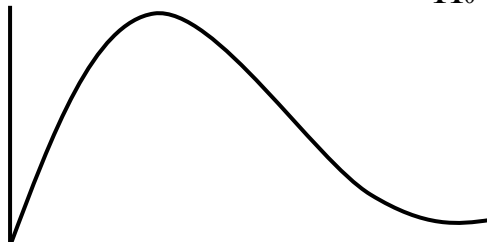
$$\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}$$



ت- ج- اذا كان الفرضية البديلة $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ ويعتبر الاختبار في هذه الحالة

اختبار من طرف واحد ويتم رفض H_0 اذا كانت

$$\chi^2 \leq \chi^2_{\alpha}$$



$$\chi^2_\alpha$$

مثال (١)-: اذا كانت رواتب محلي انظمة الحاسوب يتوزع توزيع طبيعي وترغب احدى الشركات ان تتأكد بمستوى دلالة ٠,٠٥ بان الاختلافات في الرواتب تزيد عن ٢١٠٠ دينار اخذت عينة عشوائية بحجم ٢٠ محلل انظمة فكان الانحراف المعياري للرواتب هو ١٩٠٠ دينار

الحل // تصاغ فرض العدم والبيديل لهذه المشكله كالاتي

$$H_0 : \sigma^2 = (2100)^2$$

$$H_1 : \sigma^2 > (2100)^2$$

ويتم استخدام احصاءه الاختبار χ^2 لاختبار هذه الفرضيات وكالاتي :

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

$$\frac{(20-1)(1900)^2}{(2100)^2} = 15$$

يتم مقانه هذه القيمة مع القيمة الجدولية ولكون الاختبار من طرف واحد

$$\chi^2_{1-\alpha}^{(n-1)} = \chi^2_{0.95}^{(19)} = 30.1425$$

وبما ان القيمة المستخرجة اقل من الجدولية نقبل فرض العدم

مثال (٢)-: تدعي احدى الشركات لصناعة الادوية بانها تنتج دواء معين يحتوي على مادة سمية ويجب ان تكون هذه المادة محددة بشكل دقيق بحيث ان انحرافها المعياري لا يزيد عن ١,٥ ملغم ولغرض دراسته مدى دقة هذه الشركة في اضافة هذه المادة والى كل حبة من حبوب الدواء قام المسؤولون في وزارة الصحة بتحليل عينة من ٣٠ حبة فوجدوا ان الانحراف المعياري لكمية هذه المادة السمية في هذه الحبوب يساوي ١,٣ ملغم . أختبر صحة ادعاء الشركة وتحت مستوى ٠,٠٥ معنوية

الحل // بما ان الانحراف المعياري هو ١,٥ ملغم فان التباين هو ٢,٢٥ (ملغم).

وعليه فان فرض العدم والبيديل يكتب بالشكل الاتي

$$H_0 : \sigma^2 \leq 2.25$$

$$H_1 : \sigma^2 > 2.25$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \text{ وباستخدام احصاءه مربع كاي}$$

$$\frac{(30-1)(1.3)^2}{(1.5)^2} = 21.78$$

ويتم مقارنة القيمة المستخرجة اعلاه مع القيمة الجدولية الى مربع كاي وبدرجة حرية ٢٩ وبمستوى دلالة ٠,٠٥ ولكون الاختبار من طرف واحد فاننا نجد

$$\chi^2_{0.95}^{(29)} = 42.56$$

وبما ان القيمة المستخرجة اقل من الجدولية لذا لا نستطيع رفض فرض العدم أي ان ادعاء الشركة صحيح في دقة انتاج هذا الدواء وضمن المستوى المطلوب .

٣- اختبار يتعلق بنسبة المجتمع P :-

ويستخدم هذا النوع من الاختبار اذا كانت نسبة المفردات التي تحمل صفة معينة في مجتمع ما هي P فمثلا نسبة الوحدات التالفة من انتاج مصنع معين ، نسبة الناجحين في امتحان الكفاءة العلمية للمتقدمين للدراسات العليا ، نسبة الراغبين في عمل معين ، نسبة الذكور من التدريسيين الخ ويتم تقدير $\hat{p} = \frac{x}{n}$ حيث ان x تمثل عدد

حالات النجاح (الحالات الملائمة لهذه الصفة) وان n عدد المحاولات الممكنة المستقلة ، ان توزيع المتغير العشوائي x توزيع ثنائي الحدين بمتوسط np وتباين npq وعليه يكون توزيع النسبة \hat{p} توزيع ثنائي الحدين بمتوسط p وتباين $\frac{pq}{n}$ ولكن اذا كان حجم العينة كبير جدا فان \hat{p} سيقرب توزيعها الى التوزيع الطبيعي بمتوسط p وتباين $\frac{pq}{n}$ أي $\hat{p} \sim N(P, \frac{pq}{n})$.

فرض العدم $H_0 : p = p_0$

هذه احدي الحالات للفرض البديل $H_1 : p \neq p_0$

$H_1 : p > p_0$

$H_1 : p < p_0$

نستخدم احصاءه الاختبار والتي يؤول توزيعها الى التوزيع الطبيعي بسبب كبر حجم العينة واستخدامها لنظرية الغاية المركزية

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

ويتم مقارنة القيمة المستخرجة الى Z مع القيمة الجدولية الى Z وبمستوى دلالة α ونحدد قيمتها على ضوء حالة الفرضيات البديلة وبنفس الاسلوب الذي اعتمدناه في حاله الاختبارات للمتوسط .

مثال (١):- يعتقد ان نظام الحوافز المعمول به في احد المصارف الاهلية يؤيده ٦٤% من الموظفين اختبر بمستوى معنوية ٠,٠٥ صحة هذا الاعتقاد علما بان عدد الذين يؤيدون هذا النظام في عينة عشوائية بسيطة تم سحبها من موظفي هذا المصرف حجمها ١٠٠ موظف هو ٦٠ موظف .

الحل// يتم تحديد فرض العدم والبديل أولا وكالاتي :-

$$H_0 : p = 0.64$$

$$H_1 : p \neq 0.64$$

يتم تقدير p وحسب الصيغة الآتية $\hat{p} = \frac{60}{100} = 0.60$

ولكون حجم العينة كبير نستخدم احصاءه Z لاختبار الفرض اعلاه

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$
$$Z = \frac{0.60 - 0.64}{\sqrt{\frac{(0.64)(0.36)}{100}}} = -0.83$$

وباستخدام القيمة الجدولية الى Z من الجدول الطبيعي وبمستوى دلالة 0.05 ولكون الاختبار من جانبيين تكون $Z_{0.975} = 1.96$ لذا لا نستطيع رفض فرضية العدم H_0 لكون القيمة المستخرجة المطلقة اصغر من الجدولية . وهذا يعني صحة الاعتقاد حول نظام الحوافز المعمول به حاليا .

مثال (٢) :- من الدراسات السابقة وجد ان واحد من عشرة سواق تكسي يفضلون اطارات ديوانية فقامت شركة صناعه هذه الاطارات بحمله دعائية في التلفزيون هدفها الترويج وزيادة مبيعاتها من هذه الاطارات ، وللحكم على مدى نجاح هذه الحمله الدعائية اخذت عينه حجمها 200 سائق تكسي وجد بينهم 26 يفضلون هذا النوع من الاطارات . هل هذه البيانات تعطي دليلا كافيا على ازدياد نسبة الذين يفضلون اطارات ديوانية وبمستوى دلالة 0.01 .

الحل // بما ان سائق التوكسي يفضل او لايفضل اطارات ديوانية هذا يعني ان توزيع المجتمع هنا هو توزيع ثنائي الحدين يتم صياغة فرض العدم والبديل كالاتي :

$$H_0 : p = 0.10$$

$$H_1 : p > 0.10$$

ويتم تقدير هذه النسبة $\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{26}{200}$ ولكون حجم العينة 200 لذا ستؤول هذه

الاحصاءه ان تكون احصاءه الاختبار Z وكالاتي :-

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$
$$Z = \frac{\frac{26}{200} - 0.10}{\sqrt{\frac{(0.10)(0.90)}{200}}} = 1.41$$

وعندها نجد قيمه Z الجدولية بمستوى دلالة 0.01 ولكون الاختبار من جانب واحد فان $Z_{0.99} = 2.326$ ومع مقارنتها مع القيمة المستخرجة . لانستطيع رفض فرض العدم

لان القيمة المستخرجة المطلقة أصغر من القيمة الجدولية وهذا يعني فشل الحملة الدعائية لانها لم تزيد من نسبة التفضيل لهذا النوع من الاطارات .

مثال (٣):- عينه حجمها ٢٠٠ من احصاء السيارات في مدينة ما اوضحت ان ٤٨ منهم لديهم رخصة قيادة انتهت صلاحيتها علما بان نسبة هولاء السائقين لنظيرهم في السنة السابقة كانت ٠,٣٠ استخدم هذه البيانات للتأكد من ان نسبة السواق التي لديهم رخصة قيادة انتهت صلاحيتها قد انخفضت عما كانت عليه بمستوى دلالة ٠,٠٥ .
الحل // ان فرض العدم والبدليل يكون

$$H_0 : p = 0.30$$

$$H_1 : p < 0.30$$

ويكون تقدير هذه النسبة من بيانات العينة وكالاتي $\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{48}{200}$ ولكون حجم العينة كبير يمكن استخدام احصاءه Z لاختبار الفرضيه اعلاه

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

$$Z = \frac{0.24 - 0.30}{\sqrt{\frac{(0.30)(0.70)}{200}}} = -1.85$$

ويمكن ايجاد القيمة الجدولية الى Z بمستوى دلالة ٠,٠٥ ولكون الاختبار من طرف واحد نجد $Z_{0.95} = 1.645$ وبما ان القيمة المستخرجة المطلقة اكبر من الجدولية لذا نرفض فرض العدم H_0 وهذا يعني ان هنالك دليل على انخفاض نسبة السواق الذين لديهم رخصة قيادة انتهت صلاحيتها .

أختبارات تتعلق بالفروق بين متوسطي مجتمعين

ويستخدم هذا النوع من الاختبارات اذا تطلب دراسة متوسطي عينتين لمعرفة ما اذا كان الفرق بينما كبير بدرجة تمكننا من القول بانهما مسحوبتين من مجتمعين مختلفين أم أن الفرق صغير بدرجة يمكن أرجاعها للصدفة .
فمثلا ترغب بالمقارنه بين نوعين من المصابيح الكهربائية أو نوعين من التغذية أو نوعين من اطارات السيارات او طريقتين من طرق التدريس او قسمين من اقسام الادارة في جامعتين مختلفتين ، او مقارنة معدلات الاجور بين المصارف الحكومية والاهلية الخ . وتتضمن هذه المقارنات الحالات التالية .

- الحالة الاولى:-

لتكن x_1, x_2, \dots, x_{n_1} عينه عشوائية حجمها n_1 من مجتمع يتوزع توزيع طبيعي بمتوسط M_1 وتباين σ_1^2 وكانت y_1, y_2, \dots, y_{n_2} عينة عشوائية اخرى مستقلة عن الاولى حجمها n_2 من مجتمع يتوزع توزيع طبيعي بمتوسط M_2 وتباين σ_2^2

وبافتراض ان σ_1^2 و σ_2^2 معروفتان وبغض النظر عن حجم العينتان. ونفرض ان \bar{x} هو مقدر M_1 و \bar{y} هو مقدر M_2 ولذلك فان $\bar{x} - \bar{y}$ هو مقدر الفرق بين متوسطي مجتمعين $M_1 - M_2$ وان احصاءه الاختبار ستوزع توزيع طبيعي لاختبار فرضية الفرق بين متوسطي المجتمعين للفرضية البديله

$$H_0 : M_1 - M_2 = d_0$$

$$H_1 : M_1 - M_2 \neq d_0$$

$$H_1 : M_1 - M_2 > d_0$$

$$H_1 : M_1 - M_2 < d_0$$

حيث d_0 قيمة ثابتة قد تكون موجبة او سالبة او صفر ، وان احصاءه الاختبار حسب

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y} - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

ويتم مقارنة القيمة المستخرجة مع القيمة الجدولية الى Z وبمستوى دلالة α والتي تتحدد قيمتها على ضوء حاله الفرضية البديله وكالاتي :-

$$H_1 = M_1 - M_2 \neq d_0 \text{ اذا كانت الفرضية البديله}$$

أي أن الاختبار من طرفين ويتم رفض H_0 اذا كانت $|Z| \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ، وعدم رفض

فرضية العدم اذا تحقق عكس ذلك .

$$H_1 = M_1 - M_2 > d_0 \text{ اذا كانت الفرضية البديله}$$

فيعتبر الاختبار في هذه الحالة اختبار من طرف واحد ويتم رفض H_0 اذا كانت $|Z| \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ، وعدم رفض H_0 (أي قبول H_1) اذا تحقق عكس ذلك .

ج-اذا كانت الفرضية البديله $H_1 = M_1 - M_2 < d_0$ وهو الاخر اختبار من جانب واحد ويتم رفض H_0 اذا كانت $|Z| \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ، وعدم رفض H_0 (أي قبول H_1) اذا

تحقق عكس ذلك.

مثال:-

يعتقد ان المسافة الازمه لتوقف نوعين من السيارات مقاسة بالاقدام يتبع توزيع طبيعي بمتوسط M_1 وتباين ٧٠ (قدم)² بالنسبة للتوزيع الاول ومتوسط M_2 وتباين ٧٤ (قدم)² بالنسبة للنوع الثاني من السيارات . ولغرض مقارنة مقدرة النوعين من السيارات على التوقف السريع سحبت عينتان عشوائيتان تتكون كل منهما من ١٦ سيارة من كل نوع حيث حسبت المسافة اللازمه للتوقف الكامل عند سرعة ٦٠ كم/ساعة فتبين ان $\bar{x}_1 = 85$ قدم ، $\bar{x}_2 = 90$ قدم هل تؤدي هذه البيانات الى قبول الفرض الذي يدعي بأن سيارات النوع الاول اقل مسافة تحتاج للتوقف الكامل من سيارات النوع الثاني وعند مستوى معنوية ٠,٠٥ .

الحل// يمكن صياغة فرض العدم والبديل كالاتي

$$H_0 : M_1 - M_2 = 0$$

$$H_1 : M_1 - M_2 < 0$$

ولكون المجتمعات طبيعية والتباينات معروفة نستخدم احصاءه الاختبار Z

$$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{85 - 90 - 0}{\sqrt{\frac{70}{16} + \frac{74}{16}}} = -1.667$$

وكالاتي : ويتم إيجاد قيمة Z الجدولية وبمستوى معنوية 0,05 ولكون الاختبار من طرف واحد فان $Z_{0,95} = 1.645$ وعلية بما ان القيمة المستخرجة المطلقة اكبر من القيمة الجدولية لذا نرفض فرضية العدم وهذا يعني ان مسافة التوقف الكامل للسيارة من النوع الاول اقصر من مسافة التوقف الكامل للنوع الثاني .

-الحاله الثانية :-

نفرض ان عينة عشوائية حجمها n_1 مسحوبة من مجتمع توزيع طبيعي بمتوسط M_1 وتباين σ_1^2 وعينة اخرى مستقلة عنها حجمها n_2 مسحوبة من مجتمع توزيع طبيعي بمتوسط M_2 وتباين σ_2^2 ، بافتراض أن σ_1^2 و σ_2^2 غير معلومتين ولكنهما متساويتين أي

-($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) :-

نستخدم S_1^2 و S_2^2 كمقدرات لكل من σ_1^2 و σ_2^2 المجهولتان على التوالي ولكن بافتراض ان $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ فإن كل من S_1^2 و S_2^2 سيقدران نفس المقدار وعلية يتطلب جمعهما الحصول على مقدار واحد وكالاتي :

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

وعلى ضوء حجوم العينات تتحدد الاحصاءه المناسبة وهناك حاتان أي اما ان تكون حجوم العينات كبيرة او ان تكون صغيرة .

1- اذا كانت $n_1 + n_2 - 2 > 30$ فان احصاءه الاختبار الملائمة هي

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y} - d_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

حيث أن $\bar{x} - \bar{y}$ هو مقدر الفرق بين متوسطي مجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا d_0 . هو الفرق بين المتوسطين اما ان يكون موجب او سالب أو صفر .

$$H_0 : M_1 - M_2 = d_0$$

$$H_1 : M_1 - M_2 \neq d_0$$

$$H_1 : M_1 - M_2 > d_0$$

$$H_1 : M_1 - M_2 < d_0$$

ويتم مقارنه القيمة المستخرجة مع القيمة الجدولية الى Z وبمستوى معنوية α والتي تتحدد قيمتها على ضوء حاله الفرضية البديلة وكالاتي :-

$$H_1 = M_1 - M_2 \neq d_0$$

أي أن الاختبار من طرفين ويتم رفض H_0 اذا كانت $|Z| \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ، وعدم رفض فرضية العدم اذا تحقق عكس ذلك .

ب- اذا كانت الفرضية البديله $H_1 = M_1 - M_2 > d_0$ فيعتبر الاختبار في هذه الحالة اختبار من طرف واحد ويتم رفض H_0 اذا كانت $|Z| \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ، وعدم رفض H_0 (أي قبول H_1) اذا تحقق عكس ذلك .

ج- اذا كانت الفرضية البديله $H_1 = M_1 - M_2 < d_0$ وهو الاخر اختبار من جانب واحد ويتم رفض H_0 اذا كانت $|Z| \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ، وعدم رفض H_0 (أي قبول H_1) اذا تحقق عكس ذلك .

٢- اذا كانت $n_1 + n_2 - 2 \leq 30$ فان الاحصاءه الملائمة هي

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - d_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

أي ان الاحصاءه تتوزع التوزيع t وبدرجة حرية $n_1 + n_2 - 2$ ويتم مقارنه القيمة المستخرجة مع القيمة الجدولية الى t وبدرجة حرية $n_1 + n_2 - 2$ وبمستوى دلالة α وتتحدد قيمته على ضوء حاله الفرضية البديله أختبار من طرفين او من اختبار من طرف واحد وحسب الاسس السابقة

مثال:- يرغب مدير ادارة التدريب باحدى المصانع في مقارنه تاثير طريقتين من طرق التدريب على اداء عمل معين . سميت عينتان عشوائيتان مستقلتان من العاملين بالمصنع العينة فيها ٣٦ عامل ويتم تدريب عمال احدهما باستخدام الطريقة A بينما يتم تدريب عمال الاخرى باستخدام الطريقة B . حيث يتم توزيع العمال على طريقتي التدريب باسلوب عشوائي كانت نتائج العينتين من العمال بان متوسط الوقت اللازم لاتمام العمل المطلوب وذلك بعد الانتهاء من فترة التدريب هي ٤٥ و ٥٥ دقيقة للطريقة الاولى والطريقة الثانية على التوالي وان تباين الوقت اللازم لاتمام العمل هو ٢٠٠ و ٢٧٦ (دقيقة) على التوالي . هل هنالك دليل على ان كفاءه الطريقة A اقل كفاءه من الطريقة B مفترضا تساوي تباين الطريقتين وبمستوى دلالة ٠,٠٥ .

الحل// المقصود بالمطلوب هو هل هنالك دليل على ان الطريقتين مختلفتين وبالتالي فن فرضية العدم والبديله هي

$$H_0 : M_1 = M_2$$

$$H_1 : M_1 < M_2$$

او نستطيع ان نصيغ فرض العدم والبديل كالاتي

$$H_0 : M_A - M_B = 0$$

$$H_1 : M_A - M_B < 0$$

من المعلومات المتوفرة على الرغم من تساوي التباين ولكنهما مجهولان مما

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad \text{يمكن تقديرهما وكالاتي:}$$

$$\frac{35(200) + 35(276)}{36 + 36 - 2} = 238 \quad \text{(دقيقة) } ^2$$

ولكون العينتين الاولى والثانية اكبر من ٣٠ لذا يمكن استخدام احصاءة الاختبار

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y} - d_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{45 - 55}{\sqrt{238(\frac{1}{36} + \frac{1}{36})}} = \quad \text{وكالاتي :}$$

ويتم ايجاد القيمة الجدولية بمستوى دلالة ٠,٠٥ ولكون الاختبار من طرف واحد

$$Z_{0.95} =$$

مثال:- انتجت شركة الاصباغ الحديثة نوعية من الطلاء ولغرض المقارنة بين هذين الطلائين اخذت عينة عشوائية حجمها ٤ علبة من النوع الاول حجم العلبة غالون واحد ، وجد انها تظلي في المعدل ٥٤٦ (قدم) ^٢ وبانحراف معياري قدره ٣١ (قدم) ^٢ . أما العينة الثانية فكانت بحجم ٤ علبة ايضا من النوع الثاني وجد انها تظلي من الحيطان في المعدل ٤٩٢ (قدم) ^٢ وبانحراف معياري قدره ٢٦ (قدم) ^٢ ، مفترضين أن مجتمعات علب الطلاء تتوزع توزيع طبيعي للنوعين وبتباينات متساوية هل هنالك دليل على ان الطلاء من النوع الاول افضل من الطلاء من النوع الثاني وبمستوى دلالة ٠,٠٥ .

نضع فرض العدم والبديل كالاتي $H_0 : M_1 = M_2$

$$H_1 : M_1 > M_2$$

ولكون حجوم العينات صغيرة والتباينات مجهوله ومتساوية نستخدم احصاءة t

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - d_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad \text{وكالاتي}$$

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \sqrt{\frac{3(31)^2 + 3(26)^2}{4 + 4 - 2}} = 38.609$$

وبالتعويض في صيغة t نحصل على الآتي

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - d_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{546 - 492}{28.609 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} = 2.67$$

ولكون الاختبار من طرف واحد فنجد احصاءه t من جداول توزيع t وبدرجة حرية $6 = n_1 + n_2 - 2 = 4 + 4 - 2$ أي $t_{0.95}^6 = 1.943$ ، وبما أن القيمة المستخرجة المطلقة أكبر من الجدولية لذا نرفض فرض العدم وهذا يعني ان الطلاء من النوع الاول هو افضل من النوع الثاني حيث يستطيع ان يطلي اكبر مساحة من الثاني .

- الحالة الثالثة :-

نفرض عينتان عشوائيتان مستقلتان مسحوبتان من مجتمعين طبيعيين $N(M_1, \sigma_1^2), N(M_2, \sigma_2^2)$ وان σ_1^2, σ_2^2 غير معلومتان ولا متساويتان $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ عندئذ يمكن اعتبار S_1^2 مقدر الى التباين σ_1^2 و S_2^2 مقدر الى التباين σ_2^2 في هذه الحالة يجب تمييز بين حالتين وهي عندما يكون حجم العينات كبيرة وحجم العينات صغيرة حيث تختلف احصاءة الاختبار باختلاف ذلك .

١- حالة العينات الكبيرة :-

عندما تكون العينات المسحوبة من المجتمعات كبيرة $n_1 \geq 30, n_2 \geq 30$ فان احصاءة الاختبار في هذه الحالة تؤول الى التوزيع الطبيعي Z وكالاتي

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y} - d_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

ويتم مقرنه Z المستخرجة من الصيغة اعلاه مع القيمة الجدولية اليها وبمستوى α وتتحدد قيمتها على ضوء حاله الفرضية البديلة لهذا الاختبار فيما اذا كان اختبار من طرف واحد او من طرفين وبنفس الاسس والقواعد السابقة .